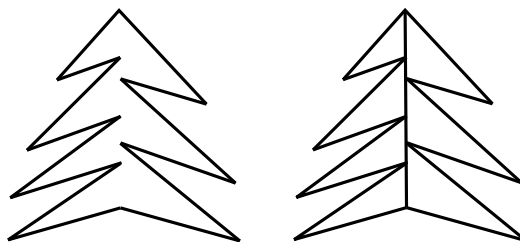


Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2022-2023 уч.год
6 класс
Решения и ответы

1. Существует ли четырнадцатигульник, не обязательно выпуклый, который можно разрезать на семь треугольников, проведя ровно один отрезок?

Решение. Существует. Один из примеров показан на рисунке.



2. Весной на даче посадили несколько луковиц многолетних цветов. Осенью из половины посаженных луковиц выросли цветы и еще по три новых луковицы, из трети луковиц выросли цветы и еще по две новых луковицы. Шестая часть посаженных луковиц погибла. На зиму все живые луковицы выкопали, и затем еще два сезона сажали все луковицы, выкопанные предыдущей осенью. Результативность посадок сохранялась в той же пропорции. Когда третьей осенью выкопали все живые луковицы, их оказалось 864. Сколько луковиц посадили на даче в первый год?

(Многолетние луковицы сажают каждый год. Осенью из луковицы вырастают цветы и появляются новые луковицы. Молодые и старые луковицы выкапывают, хранят, следующей весной сажают снова. Но некоторые луковицы погибают.)

Решение. Число луковиц, посаженных в первый год, делится на 6. Пусть посадили $6x$ луковиц, тогда в первую осень выкопали $(3x + 9x) + (2x + 4x)$ луковицы, это равно $18x$ луковиц. Т.е. каждый год число луковиц утраивалось. Пройдем всю последовательность чисел обратно.

$$864 \rightarrow 288 \rightarrow 96 \rightarrow 24$$

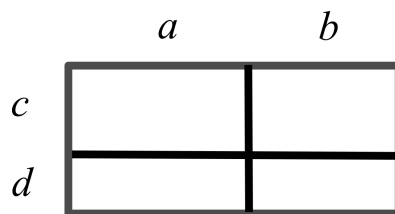
Ответ. 24 луковицы.

3. Карлсон загадывает число 345609812. Малыш может переставлять местами любые две цифры разной четности. Какое наибольшее число может получиться у Малыша?

Решение. Наибольшее возможное число, которое можно получить из данного набора цифр – это 986543210. Его можно получить с помощью следующих операций:

$$\begin{aligned} 345609812 &\rightarrow 346509812 \rightarrow 436509812 \rightarrow \\ &\rightarrow 936504812 \rightarrow 986504312 \rightarrow 986504213 \rightarrow \\ &\rightarrow 986503214 \rightarrow 986503241 \rightarrow 986513240 \rightarrow 986543210 \end{aligned}$$

Ответ. 986543210



4. На рисунке можно насчитать всего девять прямоугольников. Длины всех отрезков a, b, c, d – целые числа. Сколько прямоугольников на рисунке могут иметь четную площадь? Укажите все ответы и докажите, что других нет.

Решение. Рассмотрим отрезки $a, b, a + b$. В зависимости от четности a и b , из трех отрезков два будут иметь нечетную длину, а один четную, или все три отрезка будут иметь четную длину. Аналогично, из отрезков $c, d, c + d$ или два имеют нечетную длину, или все три четную. Получаем два варианта набора площадей: если хотя бы одна тройка отрезков $a, b, a + b$ или $c, d, c + d$ – тройка четных длин, то все площади на рисунке четные. Если каждая тройка, $a, b, a + b$ и $c, d, c + d$, содержит в себе по две нечетных длины, то площади соответствующих прямоугольников будут нечетными. Поэтому прямоугольников с четной площадью будет или 9, или 5. (Например, если a, b и $c, c + d$ нечетные, то нечетными будут площади прямоугольников со сторонами $a \times c, a \times (c + d), b \times c, b \times (c + d)$, а остальные произведения сторон – четные.).

Ответ. Или 9, или 5.

5. У бабушки есть четыре кучки яблок, в первой 7, во второй 8, в третьей 9, в четвертой 13 штук. Известно, что в одной из кучек оказалось червивое яблоко. Все яблоки не отличаются по виду, хорошие яблоки весят одинаково, а червивое отличается от них по весу, неизвестно, в какую сторону. У бабушки есть чашечные весы. Как ей за одно взвешивание найти две кучки, в каждой из которых все яблоки хорошие?

Решение. Необходимо положить на одну чашу весов все яблоки из первой кучки и одно яблоко из третьей, а на вторую чашу – оставшиеся 8 яблок из третьей кучки. Если весы при взвешивании окажутся в равновесии, то в первой и третьей кучках все яблоки хорошие. Если одна чаша перевешивает, то обе кучки, которые не участвуют во взвешивании, содержат только хорошие яблоки.

Существуют и другие решения.

6. На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Несколько островитян собрались на поляне и принесли с собой кокосы, причем каждый рыцарь принес по 7 кокосов, а каждый лжец – по 6.

Первый островитянин сказал: «У каждого из нас одинаковое количество кокосов», второй сказал: «Всего у нас 65 кокосов». Третий возразил: «Нет, у всех вместе 61 кокос». После этого каждый из оставшихся произнес фразу «из первых трех говоривших ровно один сказал правду». Сколько островитян собралось на поляне?

Решение: Заметим, что второй и третий островитянин противоречат друг другу, следовательно, среди них хотя бы один лжец. Если бы первый был рыцарем, то, судя по его высказыванию, все остальные тоже должны быть рыцарями (у всех было бы одинаковое количество кокосов, такое же, как и у него). Это противоречит тому, что в паре второй-третий есть хотя бы один лжец.

Если все первые трое лжецы, то тогда все остальные, сказавшие фразу «из первых трех ровно один сказал правду» тоже были бы лжецами. Если все пришедшие на

поляну – лжецы, то тогда у всех островитян должно быть одинаковое количество кокосов, но это невозможно, т.к. тогда первый сказал бы правду, а мы выяснили, что первый — лжец. Итак, первый сказавший – лжец, и в паре второй-третий кто-то один является рыцарем, а кто-то – лжецом. Получается, остальные островитяне, кроме первых трех, пришедшие на поляну – это рыцари, они сказали правду. Посчитаем количество кокосов, которое принесли эти рыцари (кроме первых говоривших). Их общее количество кокосов должно делиться на 7. Рассмотрим два случая:

- 1) Пусть лжет третий, а второй сказал правду. Тогда всего кокосов 65 штук. $65 - 6 - 7 - 6 = 46$, и это число не делится на 7.
- 2) Пусть лжет второй, а третий сказал правду. Тогда всего кокосов 61. $61 - 6 - 6 - 7 = 42$, это делится на 7. Тогда без первых трех говоривших было $42 : 7 = 6$ островитян. Всего пришло 9 островитян.

Ответ. 9 островитян